

小型無線センサーを用いた振動実験教材の試作

Prototype of vibration experiment teaching materials using small wireless sensor

鈴木 三男・増田 健二*

福島工業高等専門学校一般教科

*静岡大学工学部

Mitsuo Suzuki and Kenji Masuda*

Fukushima National Collage of Technology , Department of General

and *Faculty of Engineering, Shizuoka University

(2014年9月18日受理)

It is known that the spring pendulum is moving up and down. Although there have been little interested in torsional vibration of it, in the "Wilberforce pendulum", resonance is caused by the interaction of the torsional vibration and vertical vibration of the spring pendulum. Many students have been aroused interest in the resonance phenomenon by this pendulum. In this paper, We examined whether vibration experiments using this pendulum fitted with a small wireless sensors can be introduced to the student experiments .

Key words: Wilberforce pendulum, small wireless sensor, resonance

1. はじめに

単振動をはじめとする振動現象は力学でも非常に重要であり、その後続く波動分野の基礎となっているため、大学でも物理学生実験に取り入れられている¹⁾²⁾。これまで著者らは、文献³⁾⁻⁶⁾において、ビデオ画像位置検出法による二重振り子の運動解析や半導体位置検出素子を用いた、単振動、減衰振動、連成振動などの振動実験の教材化に取り組んできた。また本校においては、低学年の物理の授業では、授業導入時に演示実験やDVD映像を取り入れたり、実際に簡単な一斉実験を行うなどして、これまでも単振動に対する学生の関心や理解を深める努力してきた。本校学生は2学年の前期に講義及び実験を通して、まずは単振動の基礎を学習し、3学年の後期に単振動を表す微分方程式の導出から一般解までを、発展応用として学んでいる。しかしながら、高学年（高専3、4年生対象）の学生実験には振動をテーマとするものがなく、唯一「パソコン測定システムを用いた電磁気学の実験」の中で、電気振動を扱っている程度で、新たな学生実験の導入の必要性を感じていた。

今回取り上げるのは、1894年に発見された「ウィルバーフォース振り子⁷⁾⁻¹⁰⁾」である。この振り子は、

上下運動とねじれ振動が交互に起こる不思議な振り子で、「青少年のための科学の祭典」¹¹⁾やサイエンスショー等で紹介され、これまでも運動分析の報告¹²⁾や高校生による研究発表¹³⁾もされている。これまでも演示実験で「ウィバーフォース振り子」を使用し、上下振動するだけと思っている学生の固定観念を払拭し、多くの学生たちに衝撃を与え、共振現象への興味を喚起してきた。

仕組みとしては、ばねに力が加わると、フックの法則に従った伸びや縮みが生じると共に、ばねを構成する針金にはねじれが生じる。したがってばね振り子の中で、周期的な上下振動と周期的なねじれ運動が起こり、周期的なタイミングが合致する共振条件を満足したウィルバーフォース振り子では、おもりの上下運動とねじれ振動が交互に起こる。共振現象は地震の長周期振動による建物の振動、テレビやラジオの選局など身近の所で知られた現象であり、また専門科目においては、構造体の設計（免震、耐震等）などにおいて重要な現象として、取り上げられている。

そこで我々は今回、このような観点からウィルバーフォース振り子を利用し、「ばね振り子」の振り



図1 振り下げおもりと小型無線センサー

下げおもりの形状を一工夫することで、今までは見過ごしてきたおもりのねじれ振動に着目した、新たな学生実験導入に向けた試作実験を行った。

2. 振り子と測定系

図1は実際に実験で使用した振り下げおもりと縦置き小型無線センサー (TSND121) の写真である。まず振り下げおもりは、鉄製の六角ボルト (M6×60) を中心に構成されている。ボルト中央部のネジ部には、数個のM6ナット、ワッシャーを入れて、振り下げおもり全体の質量を調整できるように工夫した。

ボルトの下部には、慣性モーメント調整用の大型鉄製六角ナットを設置した。この大型六角ナットの両端には、軽いABS樹脂製M4ネジ棒を取り付け、ネジ棒上で調整ナットを回転して、回転中心からの距離を変えることで、振り下げおもりの慣性モーメントを調整できるように設計した。

小型無線センサーは3軸加速度・角速度の他に地磁気、気圧・温度をサンプリングし、Bluetooth (Class2) を通じてPCにデータを送信できる。また図2に示すように、専用の「Sync Record (T)」ソフト (ART-Promotions製) を使用すれば、PCの1画面上で、連動した小型カメラからの映像とグラフ化された受信データを、同時に確認する事も出来る。最終的に必要なデータはCSV形式で保存し、後からEXCELなどの表計算ソフトで簡単にデータを読み出し、加工やグラフ化する事も可能である。

3. 測定および結果

高学年 (高専3、4年生対象) の学生実験なので、実験項目として単振動に加えて、減衰振動と振現象を組入れた学生実験を考え、センサーを用いた測

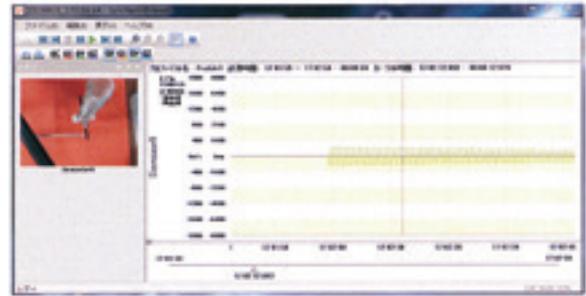


図2 Sync Record (T) 使用時のPC画面

定を行った。

3.1 単振動によるばね定数kの測定

一般にばね定数kのばねに質量mのおもりをつるし、釣り合いの位置からzだけ伸びているとき、ばね振り子の運動方程式は

$$m \frac{d^2 z}{dt^2} = -kz \quad (1)$$

と表される。この一般解は

$$z = A \cos(\omega_z t + \alpha) \quad \omega_z = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (2)$$

であり、つるされたおもりは上下に単振動をする。(2)式中の振幅Aと初期位相αは、初期条件により決まる。図3に小型無線センサーによる、上下方向の加速度の時間変化を示す。これは振り下げおもりを図1の状態に、単振動させたものである。加速度も(1)、(2)式から、角振動数 ω_z で時間的に変化するので、このばね振り子の角振動数は、

$$\omega_z = 7.25 \text{ [rad/s]} \quad (3)$$

であった。同様に振り下げおもりにナット、ワッシャーを入れて、質量を変えて角振動数 ω_z を求め、

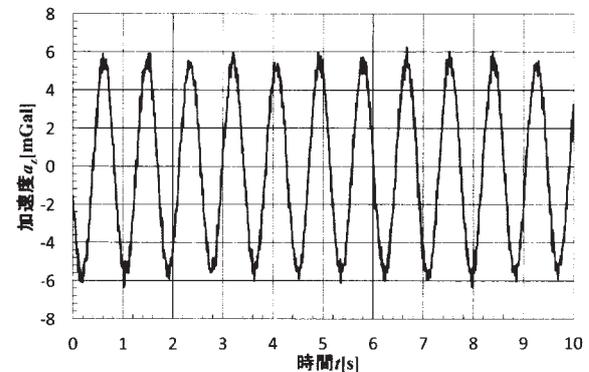


図3 加速度の時間変化

(2) 式よりばね定数 k を算出した。ワッシャーおもりを0から4個と載せ替えて測定した結果、ばね定数 k の平均値は、

$$k=3.06 \text{ [N/m]} \quad (4)$$

であった。

3.2 ねじれ振動によるねじれ弾性定数 μ の測定

振り下げおもりをつるし、釣り合いの状態ではねの上端と下端を糸で結んで、ばね伸びを一定に保ち、振り子が回転運動しかできないように工夫した。

一般に慣性モーメント I のねじり振り子が、釣り合いの位置から回転角 θ だけねじれているとき、生じる力のモーメントは回転角 θ に比例する。このとき振り子の回転の運動方程式は

$$I \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\mu\theta \quad (5)$$

で、比例定数 μ はねじれ弾性定数である。この一般解は、

$$\theta = B \cos(\omega_0 t + \beta) \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{\mu}{I}} \quad (6)$$

であり、角振動数 ω_0 のねじれ振動が生じる。図4に小型無線センサーによる、ねじれ方向の角速度の時間変化を示す。これも振り下げおもりを図1の状態、ねじれ振動させたものである。(6)式から角速度も角振動数 ω_0 で時間的に変化するので、ねじれ振り子の角振動数は、

$$\omega_0 = 7.99 \text{ [rad/s]} \quad (7)$$

であった。また、このねじれ振り子の周期 T は、

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{\mu}} \rightarrow T^2 = 4\pi^2 \frac{I}{\mu} \quad (8)$$

である。しかし、実際の実験では図1に示すように、振り下げおもりの形状は複雑で、振り子の慣性モーメント I_0 の算出は容易ではない。そこで、我々は小型

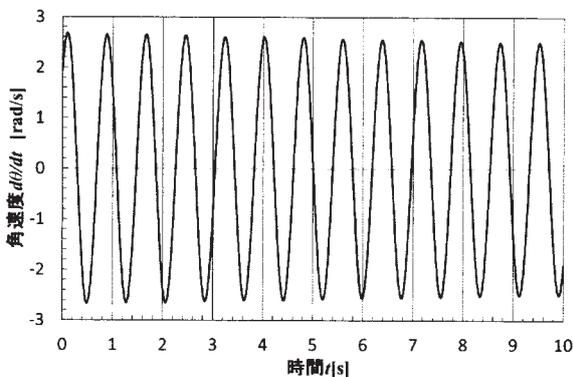


図4 角速度の時間変化

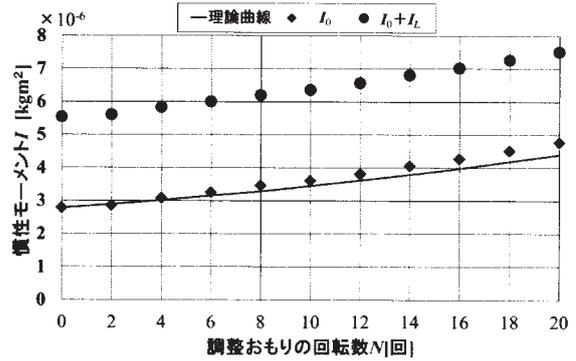


図5 慣性モーメントの変化

無線センサーの慣性モーメントが縦置き (I_L) (図1参照)と横置き (I_T) では異なる事に着目して、振り子の慣性モーメント I_0 を算出した後、ねじれ弾性定数 μ を求めた。

センサーを含む振り下げおもり全体の慣性モーメント I は、縦置きの場合は I_0+I_L 、横置きの場合は I_0+I_T となり、その結果ねじれ振動周期が T_L 、 T_T とが異なる。(8)式より、

$$T_L^2 = 4\pi^2 \frac{I_0 + I_L}{\mu}, \quad T_T^2 = 4\pi^2 \frac{I_0 + I_T}{\mu} \quad (9)$$

と表せ、振り子の慣性モーメント I_0 およびねじれ弾性定数 μ は、

$$I_0 = \frac{T_T^2(I_T - I_L)}{T_T^2 - T_L^2} - I_T, \quad \mu = 4\pi^2 \frac{I_T - I_L}{T_T^2 - T_L^2} \quad (10)$$

と表せ、各振り子の周期測定から求められる。

後の共振現象では振り子の慣性モーメントは重要である。そこで、慣性モーメント調整おもりを2回転ごとに外向きに移動させて、ねじれ振動周期 T_L 、 T_T から求めた振り子の慣性モーメント I_0 および I_0+I_L を図5に示す。図中の曲線は、調整おもりの質量 m と回転中心までの距離 r から求めた理論曲線 ($I = I_{00} + \sum m_i r_i^2$; I_{00} : 回転0での慣性モーメント) である。図5に示す各場合について、(10)式より求めたばね振り子のねじれ弾性定数 μ の平均値は、

$$\mu = 3.56 \times 10^{-4} \text{ [Nm]} \quad (11)$$

であった。

3.3 粘性抵抗の違いによる振動現象

これまで単純な単振動を扱ってきたが、慣性モーメント I のねじれ振動子を粘性のある液体中につけると、振動子には液体の粘性による抵抗力が働く。抵抗力は角速度に比例することが知られており、比例

定数 $2I\gamma$ (減衰率 γ) とすれば, 抵抗力は $2I\gamma(d\theta/dt)$ となる。したがって振動子の回転の運動方程式は,

$$I \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\mu\theta - 2I\gamma \frac{d\theta}{dt} \quad (12)$$

と表され, 解は γ によって以下の3つに分類される。

(a) 減衰振動 ($\gamma < \omega_0$ のとき)

$$\theta = Ce^{-\gamma t} \cos(\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}t + \delta), T_d = 2\pi / \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} \quad (13)$$

周期 T_d のねじれ振動をしながら, その振幅は指数関数的に減少する。

(b) 臨界減衰 ($\gamma = \omega_0$ のとき)

$$\theta = (C + Dt)e^{-\gamma t} \quad (14)$$

(c) 過減衰 ($\gamma > \omega_0$ のとき)

$$\theta = Ce^{-\gamma_1 t} + De^{-\gamma_2 t} \quad (15)$$

(b)(c)ともに動き出し後, 振動することなく静止する。

図6に減衰振動用の振動子を示す。これは図1の振動子にアルミ製円筒を外側に取り付けたものである。粘性のある液体中につけるアルミ製円筒の深さを変化させることで, 振動子に働く抵抗力を調整できる特徴がある。また我々は粘性のある液体として, 100%グリセリンを使用した。

初期条件 $t=0$ の時 $\theta=100^\circ$, $d\theta/dt=0$ で, 液体につける振動子の深さを徐々に増していくと, 減衰振動の振動回数が徐々に減り, 深さ19mmでついに振動することなく静止した。図7に深さ1mm, 19mm, 25mmのときの減衰振動の様子を示す。振動子は円筒型で, 先端は細くなる複雑な構造なため, 液体の粘度を算出するのは困難である。しかし減衰振動から得られた周期 $T_d=1.48s$, 減衰率 $\gamma=0.28$ を用い, 初期条件 $\theta=100^\circ$, $d\theta/dt=0$ の下で, 各場合の角速度 $d\theta/dt$ を算出したのが図8である。ここでは算出値に0.6倍の倍率を掛けて, 最大値を実験結果に近づけたところ, 倍



図6 減衰振動用振動子

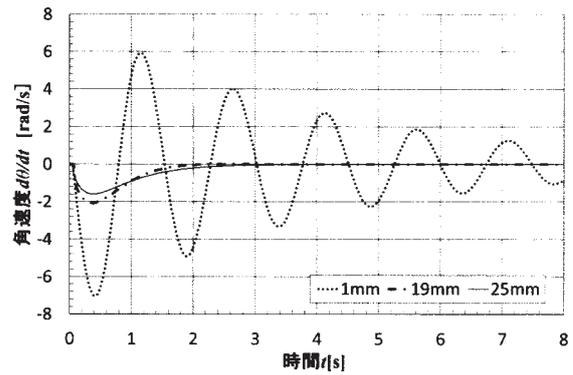


図7 抵抗力の違いによる減衰振動 (測定)

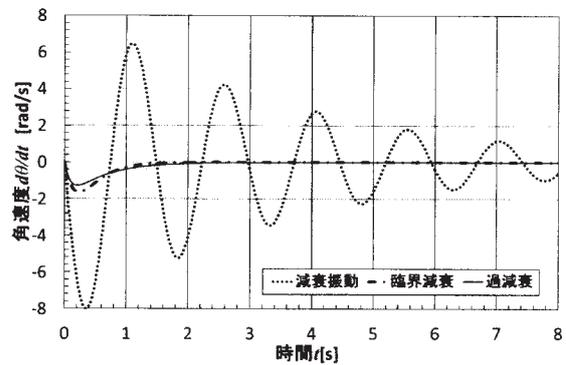


図8 抵抗力の違いによる減衰振動 (理論)

率の問題はあるが, 図7の測定結果と図8には良い一致が見られ, 振動子の深さ調節により, 3つの減衰現象を観察・確認できることが分かった。

3.4 共振現象 (ウィルバーフォース振り子)

上下振動とねじれ振動を交互に繰り返すウィルバーフォース振り子の運動は, 実に不思議な運動である。この運動は共振現象に起因するとされることから, 実際にこの運動と共振条件の関係を実験的に

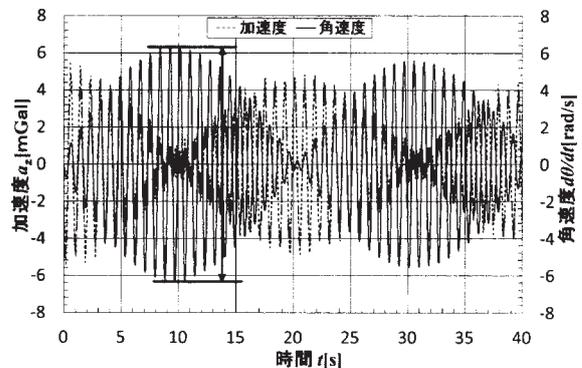


図9 ウィルバーフォース振り子の運動

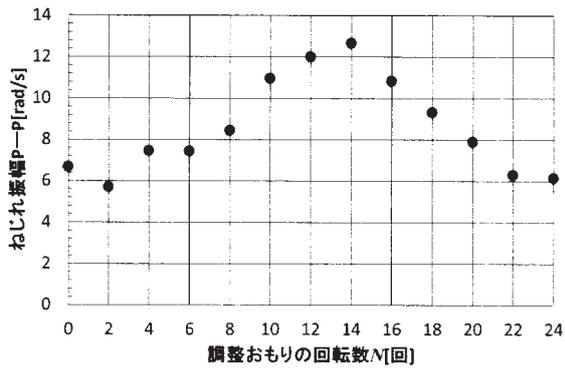


図10 調整おもりの回転数とねじれ振幅P-Pの関係

調べてみた。

まず我々は図1のようにセンサー縦置きにセットし、固定糸をはずして、慣性モーメント調整おもりを2回転ごとに外向きに移動させて、ねじれ振動の角振動数 ω_0 を変化させた。t=0の時 $z=10\text{mm}$, $d\theta/dt=0$ の同じ初期条件の下、調整おもりを14回転したときに、上下振動とねじれ振動が最も激しく交互に繰り返す現象が観察された。その時の無線センサーによる上下振動の加速度とねじれ振動の角速度の様子を図9に示す。ここで、我々は、図9に示すように、最初に表れる角速度の最大、最小値を読み取り、

ねじれ振幅P-P=振幅の最大値-振幅の最小値と定義した。調整おもりの回転数に対するねじれ振幅P-Pの値を図10に示す。図10からも14回転近傍で共振現象が起こっていることが分かる。また、(3) (6) (11) 式より上下振動の角振動数 ω_2 =ねじれ角振動数 ω_0 の条件から

$$I=I_0+I_L=6.77\times 10^{-6}[\text{kgm}^2]$$

が得られ、図5より調整おもりの位置は、14回転移動させた時の慣性モーメントの値と一致した。これは上下振動の角振動数 ω_2 とねじれ振動の角振動数 ω_0 が一致したときに共振現象が起ることを意味している。

4. まとめ

小型無線センサー(TSND121)を用いたばねの振り子の実験で、上下振動からばね定数 k 、ねじれ振動からねじれ弾性定数 μ を求めることができた。また、粘性抵抗の大きい液体に振動子をひたす深さを変えることで、3つの減衰現象を測定することもできた。上下振動とねじれ振動の結果から、ウィルバーフォース振り子の激しい運動は、上下振動の角振動数 ω_2 =ねじれ角振動数 ω_0 のとき

に共振することを実験的に確かめることができた。

しかし、実際の学生実験に導入するには、いくつかの問題点も見つかった。ねじれ振動では簡単にばねが伸びないように固定する方法や、減衰振動では、振り子の液中に浸かっている深さが一目でわかる工夫やグリセリンの粘性の温度依存性から再現性向上などが必要である。学生実験導入に向けて、今後これらの問題点を解消して、まずは数名の学生による予備練習実験ができればと考えている。その結果を踏まえて、実際の学生実験テーマに組み入れる計画である。

謝辞

減衰振動用の振動子の作成のために、飲料水用容器を加工して頂いた、福島高専モノづくり教育支援センター技術職員の福崎宏さん、松口義人さんに感謝致します。

参考文献

- 1) 静岡大学教養部物理教室編：物理実験指導書 10訂版，56(1983)。
- 2) 松本節子，増田勤，松本皓永：物理教育43-3，252(1995)。
- 3) 増田健二：大学の物理教育，3，44(1999)。
- 4) 増田健二，鈴木三男：応用物理教育，21-3，3(1997)。
- 5) 鈴木三男，増田健二：物理教育，48-1，1(2000)。
- 6) 鈴木三男，増田健二，湊淳，小澤哲：応用物理教育 25-1，3(2001)。
- 7) R. L. Wilberforce：Philosophical Magazine，38，386(1895)。
- 8) Berg, Richard E., Marshall, Todd S.: American Journal of Physics, 59-1, 32(1991)。
- 9) G. Torzo: Proceeding Int. GIREP Sem. (2003) <http://www.padova.infm.it/torzo/WilberGIREP.pdf>
- 10) 中道義之，舟田敏雄，清水啓介，岩本大，船津佑介，大庭勝久：沼津高専研究報告 44，369(2010) 3。
- 11) 青少年のための科学の祭典 2001 全国大会 実験解説集「Wilberforce 振り子」
jc.maxwell.jp/mechanics/wilberforce/index.html
- 12) 島田昌敏，孫朝紅：大阪教育大学紀要自然科学，45-1，19(1996)。
- 13) 木村光一郎：JST，課題研究報告書(2010) SSH, No.2315. ssh.jst.go.jp/research/show/622