

折り紙の数学Ⅱ

Mathematics of Paper Folding II

鈴木 正樹・乙山 克彦*・箱崎 裕紀*・小泉 亜未**

福島工業高等専門学校一般教科

*福島工業高等専門学校機械工学科

**福島工業高等専門学校物質工学科

Masaki Suzuki, Katuhiko Otuyama, Yuki Hakozaki and Ami Koizumi

Fukushima National College of Technology, Department of General Education

*Fukushima National College of Technology, Department of Mechanical Engineering

**Fukushima National College of Technology, Department of Chemistry and Biochemistry

(2010年 9月17日受理)

Paper folding (=origami) is one of Japanese unique traditional arts. We introduce some topics that, “how do paper folding and mathematics relate to each other ?” In addition, we report on how to obtain solutions of equations and a method of making an arbitrary angle using paper folding that are results of ‘research practice’ done in Fukushima National College of Technology at current year.

Key words: paper folding, origami, Delos problem, trigonometric function, theorems of Haga

1. はじめに

折り紙は、日本では子どもの遊び、というイメージが定着しているが、海外では高級な趣味あるいは教育やセラピーへの有効な手段として広く認知されている。特に、理学・工学における近年の発展が著しいことは、2006年にアメリカのカリフォルニア工科大学にて“The 4th International Conference on Origami in Science, Mathematics and Education”が開催されたことからもわかる。この身近な折り紙が、数学の対象になることは、一般の人々にはあまり知られていない。本小文では、紙を折ることで表わし得る数学的对象を話題にし、折り紙を用いてどのように数学ができるかを紹介する。さらに、今年度のミニ研究で明らかになった内容として、2.3, 2.4節では、機械工学科2年生の乙山克彦、箱崎裕紀による折り紙を用いた3次方程式の解法について、3節では、物質工学科2年生の小泉亜未による折り紙を用いた任意の角度を作る方法を述べる。

2. 折り紙と方程式

折り紙を用いて方程式を解く方法はいくつか知られている。この節では、ロベルト・ゲルトシュレーガー氏の方法⁵⁾を紹介する。

2.1 1次方程式

1次方程式

$$ax = b \quad (a \neq 0)$$

の解を表す線分を求める1つの方法として相似な三角形を利用する方法がある。

OU=1として単位を定める。OUの延長上にOA=aとなる点A及び、OUの延長上外にOB=bとなる点Bを定める。a,bの値は絶対値で考える。a<1のときはOU上に点Aを定める。点Uを通りABに平行な線とOBの交点をPとする (Fig. 1)。このとき、2つの三角形△OUPと△OABは相似であるので、

$$OP:OU = OB:OA \quad \text{より} \quad OP:1 = b:a$$

したがって、

$$OP = b/a$$

が得られる。b/aの符号は、a,bが同符号の場合は正で、異符号の場合は負である。

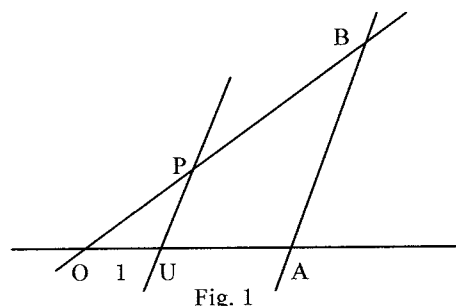


Fig. 1

2.2 2次方程式

2次方程式

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (a \neq 0)$$

を解く方法を述べる。簡単にするために両辺をaで割って次の方程式を考えることにする。

$$x^2 + px + q = 0 \quad (p = b/a, q = c/a)$$

放物線 $y=x^2/4$ と点P(-p, q)が与えられたとする (Fig. 2)。点Pを通り傾きkの直線の方程式は次の式で与えられる。

$$y = k(x + p) + q$$

この直線が放物線の接線であるための条件は、

$$k(x + p) + q = x^2/4$$

の判別式が0であることに等しいので、

$$k^2 + pk + q = 0$$

となり、kは2次方程式の解である。

したがって、与えられた2次方程式の解は点(-p, q)を含む放物線 $y=x^2/4$ の接線の傾きとして得られる。

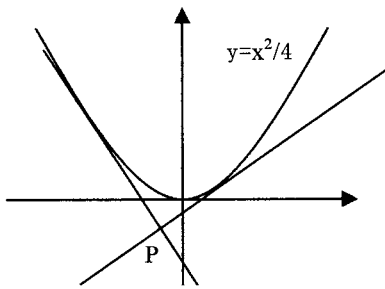


Fig. 2

2.3 3次方程式

ここでは、折り紙を用いた3次方程式の解法についてロベルト・ゲルトシュレーガー氏の方法⁵⁾とは異なる証明を与えたのでそれを定理として述べる。

3次方程式

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \quad (a \neq 0)$$

を2次方程式と同様に簡単にするために両辺をaで割って次の方程式を考えることにする。

$$x^3 + px^2 + qx + r = 0 \quad (p = b/a, q = c/a, r = d/a)$$

まず、次の2つの補題を証明する。

補題 1

2つの放物線

$$y = x^2/4 \quad (1)$$

$$(y - q)^2 = 4r(x + p) \quad (2)$$

の共通接線の傾きkは3次方程式

$$x^3 + px^2 + qx + r = 0$$

の解である。

(証明)

(1)式上の点(t, t²/4)を通る接線の方程式は、

$$y = (t/2)x - t^2/4$$

これを(2)式に代入すると、

$$\{(t/2)x - t^2/4 - q\}^2 = 4r(x + p)$$

となる。これを展開し、xについて整理すると、

$$(t^2/4)x^2 - (t^3/4 + qt + 4r)x + t^4/16 + qt^2/2 + q^2 - 4pr = 0$$

となる。これはxに関する2次方程式であり、上の接線が(2)の接線でもあるためには、この2次方程式が重解をもつ、すなわち判別式が0であればよいので、

$$(t^3 + 2pt^2 + 4qt + 8r)r = 0$$

を満たす。接線の傾きkはt/2なので、t=2kを上式に代入すると、

$$k^3 + pk^2 + qk + r = 0$$

が得られる。したがって、kは3次方程式

$$x^3 + px^2 + qx + r = 0$$

の解である。□

補題 2

放物線の焦点と準線を重ねてできる折り線はその放物線の接線である。

(証明)

xy平面上に任意の点Pとy=Lの直線をとる。点Pをy=Lに重ねてできるy=L上の点をP'とし、その折り線をMとする。さらに、PP'の中点をR、P'を通りy=Lに対する垂線とMの交点をQとする (Fig. 3)。

△PQR≡△P'QRより、PQ=P'Qである。したがって、折り線M上の点Qは、焦点P、準線y=Lとした時の放物線の接点といえる。以上より、折り線Mはその放物線の接線である。□

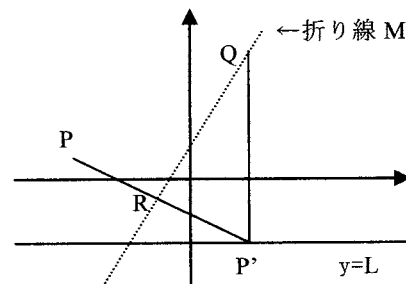


Fig. 3

補題1, 2から次の定理が得られる。

定理

3次方程式

$$x^3 + px^2 + qx + r = 0$$

の解は、

放物線 $y = x^2/4$ の

焦点 $(0, 1)$ と 準線 $y = -1$

放物線 $(y - q)^2 = 4r(x + p)$ の

焦点 $(r-p, q)$ と 準線 $x = -r-p$

を同時に重ねてできる折り線（共通接線）の傾きに等しい。

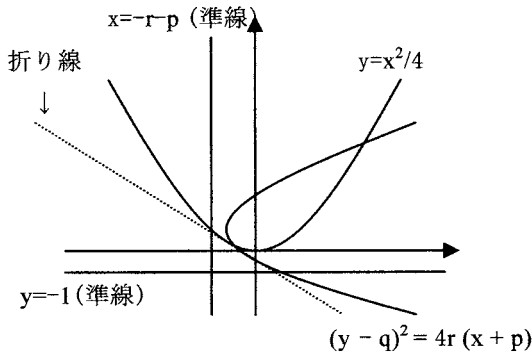


Fig. 4

例1（実数解が1つの場合）

$$x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = 0$$

の方程式に対して、各定数は、 $p = -3$, $q = 3$, $r = -1$ で与えられる。2つの放物線の焦点と準線はそれぞれ、

$(0, 1)$, $y = -1$ と $(2, 3)$, $x = 4$

であり、それぞれの焦点と準線を同時に重ねると傾きが1の直線を1つ折ることができる。したがって、

$$x = 1$$

の解が得られる。

例2（実数解が2つの場合）

$$x^3 - 4x^2 + 5x - 2 = 0$$

の方程式に対して、各定数は、 $p = -4$, $q = 5$, $r = -2$ で与えられる。2つの放物線の焦点と準線はそれぞれ、

$(0, 1)$, $y = -1$ と $(2, 5)$, $x = 6$

であり、それぞれの焦点と準線を同時に重ねると傾きが1, 2の直線を1つずつ折ることができる。したがって、

$$x = 1, 2$$

の解が得られる。

例3（実数解が3つの場合）

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$$

の方程式に対して、各定数は、 $p = -6$, $q = 11$, $r = -6$ で与えられる。2つの放物線の焦点と準線はそれぞれ、

$(0, 1)$, $y = -1$ と $(0, 11)$, $x = 12$

であり、それぞれの焦点と準線を同時に重ねると傾きが1, 2, 3の直線を1つずつ折ることができる。したがって、

$$x = 1, 2, 3$$

の解が得られる。

3つの例で示したように3次方程式が1つの実数解を持つ場合は1本、2つの実数解をもつ場合は2本、3つの実数解をもつ場合は3本の共通接線を引くことができる。解が虚数の場合は共通接線を引くことはできない。

2.4 デロスの問題

2.3節の作図において、 $p = 0$, $q = 0$, $r = -2$ とすれば傾きが $2^{1/3}$ である2つの放物線の共通接線を得ることができる。これはギリシアの3大作図問題の1つであるデロスの問題の解答を与えたことに等しい。

デロスの問題とは『与えられた立方体の2倍の体積をもつ立方体を作れ』という問題であり、立方体倍積問題ともいわれる。伝説によればデロスの神託で古代アテナの人々が荒れ狂う疫病から逃れるためには立方体の形をしたアポロンの祭壇の体積を2倍にすればよいと预言されたとある。立方体の体積を2倍にするということは立方体の各辺を $2^{1/3}$ 倍することなので、与えられた線分の長さの $2^{1/3}$ 倍の長さをもつ線分を作図することがデロスの神託の解決に帰着することになる。この問題は定規とコンパスを用いる作図では解くことのできない古代ギリシアの有名な3大作図問題の1つである。3大作図問題とはこの他に、角の三等分問題と円を面積の等しい正方形に直す問題（円積問題）がある。角の三等分問題は、折り紙を用いて解くことが可能で、その方法は、昨年の研究紀要No. 50の折り紙の数学³⁾の中で述べた。円積問題は折り紙を用いても解くことができないことが知られている。

3. 折り紙と角度

この節では三角関数と芳賀の第一定理折り的一般化を用いて、ほぼ任意の角度を折る方法を述べる。

3.1 余弦

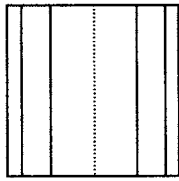
コサインを用いて角度を作る方法を示す。

・ θ が鋭角の場合

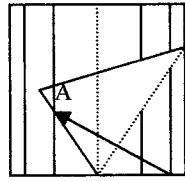
$$\cos \theta = b/a, 0 \leq b \leq a (a \neq 0) \text{ とする。}$$

具体的な折り方は以下の通りである。

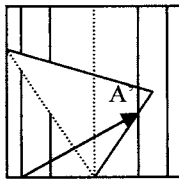
- ① 中心に折り線をつけ底辺との交点をOとする。その折り線を基準にOA:OB=OA':OB'=a:bの折り線を左右両方につける。つけた折り線と折り紙の底辺との交点をそれぞれA, B, A', B'とする。(Fig. 5)
- ② AがB'を通る折り線に重なるように折る。同様にA'がBを通る折り線に重なるように折る。(Fig. 6, 7)
- ③ ②でつけた折り線間の角がθとなる。(Fig. 8)



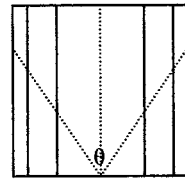
A' B' O B A
Fig. 5



A' B' O B A
Fig. 6



A' B' O B A
Fig. 7



A' B' O B A
Fig. 8

この手順でなぜθが作図されているのかを示す。

Fig. 9において、OP=OA=a, OB'=bより、

$$\angle POB' = \cos^{-1}(b/a) = \theta$$

∠POQ = ∠AOQであるので、

$$\angle AOQ = (\pi - \theta)/2$$

$$\angle QOO' = \pi/2 - \angle AOQ = \theta/2$$

同様に、∠POQ' = θ/2であるので、∠POQ = θである。

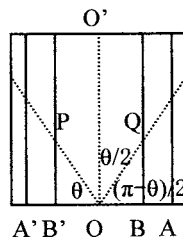


Fig. 9

・θが鈍角の場合

$$\cos \theta = -b/a, 0 \leq b \leq a (a \neq 0) \text{ とする。}$$

- ① 鋭角のときと同様に行う。

- ② AがBを通る折り線に重なるように折る。同様にA'がB'を通る折り線に重なるように折る。
- ③ ②でつけた折り線間の角がθとなる。

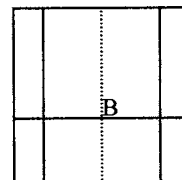
3.2 正弦

サインを用いて角度を作る方法を示す。

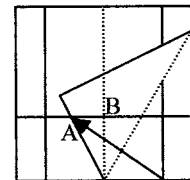
・θが鋭角の場合

$$\sin \theta = b/a, 0 \leq b \leq a (a \neq 0) \text{ とする。}$$

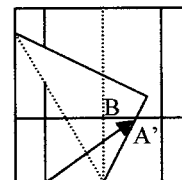
- ① 中心に折り線をつけ底辺との交点をOとする。その折り線を基準にOA(OA'):OB=a:bとなるように折り線をつける。つけた折り線と折り紙の底辺の交点をA,A'とし、中心の折り線との交点をBとする。(Fig. 10)
- ② AがA'側のBを通る横の折り線に重なるように折る。同様にA'がA側のBを通る横の折り線に重なるように折る。(Fig. 11, 12)
- ③ ②でつけた折り線間の角がθとなる。(Fig. 13)



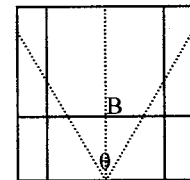
A' O A
Fig. 10



A' O A
Fig. 11



A' O A
Fig. 12



A' O A
Fig. 13

Fig. 14において、OP=OA=a, PP'=OB=bより、

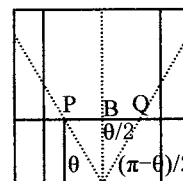
$$\angle POP' = \sin^{-1}(b/a) = \theta$$

∠POQ = ∠AOQであるので、

$$\angle AOQ = (\pi - \theta)/2$$

$$\angle QOB = \pi/2 - \angle AOQ = \theta/2$$

同様に、∠POB = θ/2であるので、∠POQ = θである。



A' P' O A
Fig. 14

・ θ が鈍角の場合

$\sin\theta = b/a, 0 \leq b \leq a (a \neq 0)$ とする。

- ① 鋭角のときと同様行う。
- ② AがA側のBを通る横の折り線に重なるように折る。同様にA'がA'側のBを通る横の折り線に重なるように折る。
- ③ ②でつけた折り線の間が θ となる。

3.3 正接

タンジェントを用いて角度を作る方法を示す。

・ θ が鋭角の場合

$\tan\theta = b/a, 0 \leq a, b (a \neq 0)$ とする。

- ① 折り紙を四等分する。中心をOとし、OA:OB=a:bとなる折り線をつける。その折り線の交点をPとする。(Fig. 15)
- ② OとPを通る折り線とAを通る折り線との間の角が θ となる。(Fig. 16)

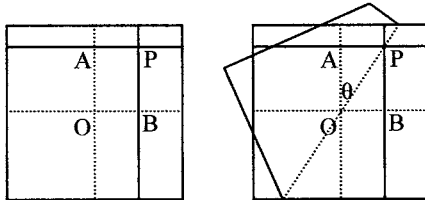


Fig. 15

Fig. 16

Fig. 16において、 $OA = a, AP = OB = b$ より、
 $\angle POA = \text{Tan}^{-1}(b/a) = \theta$

である。

・ θ が鈍角の場合

$\tan\theta = -b/a, 0 \leq a, b (a \neq 0)$ とする。

- ① AをOの下側になるように折り線をつける。他は鋭角のときと同様に行う。
- ② OとPを通る折り線とAを通る折り線との間の角が θ となる。

以上のように、辺の比を与えると三角関数を用いて角度を得ることができる。三角関数は角度の情報を長さの情報に置きなおして扱うことができるということである。つまり、折り紙を用いて任意の角度を得るためには角度に対応する辺の比を折ることができれば良いということになる。そこで、折り紙の数学³⁾でも述べた芳賀の第一定理折りの一般化を考える。

3.4 第一定理折りの一般化と任意角の折り方

芳賀の第一定理折りについてはオリガミクスⅠ¹⁾

を参照。

折り紙の4つの頂点をA, B, C, Dとする。Fig. 17のように上辺に任意の点Eを定め、右下の頂点Cを重ねて折り紙を折る。DEの長さをxとする。この1回の折り方で、他の辺や折り線にさまざまな長さが生じる。それらの一部を Fig. 17に示す。

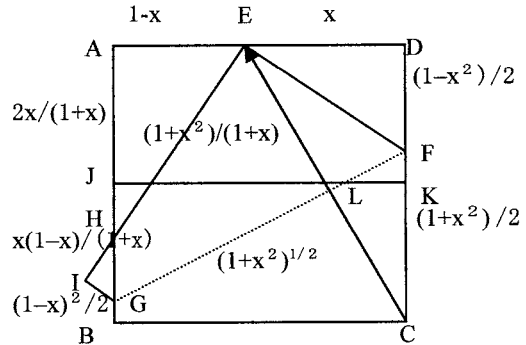


Fig. 17

例えば、xを(与えやすい)次の値にすると、折り紙の1辺の長さ1に対して、次のような長さが得られる。

Table 1

x	1/2	3/4	7/8	15/16
DE	0.5	0.75	0.875	0.9375
AE	0.5	0.25	0.125	0.0625
AH	0.6667	0.8571	0.9333	0.9677
GH	0.2083	0.1116	0.0589	0.0303
BG	0.125	0.0312	0.0008	0.0020
CF	0.625	0.7813	0.8828	0.9395
DF	0.375	0.2188	0.1172	0.0605
EH	1.25	1.5625	1.7656	1.8789
HI	0.1167	0.1071	0.0583	0.0302
FL	0.2795	0.4688	0.5813	0.6425
FK	0.125	0.2813	0.3828	0.4395
KL	0.25	0.375	0.4375	0.4688
JL	0.75	0.625	0.5625	0.5313

- このようにして得られた値を元に三角関数表から、ほぼ任意の角度を作ることができる。手順は、
- ① 作りたい角度を決める。
 - ② 三角関数表からその角度に対する値を調べる。
 - ③ その値に近い値をTable 1から探す。

- ④ 折り紙を折り、長さ1に対する長さを得る。
 ⑤ ④で得られた長さと三角関数のいずれかを用いて折り紙を折ると角度が得られる。

例えば、 12° を折りたいときは、三角関数表から
 $\sin 12^\circ = 0.2079$

とわかるので、Table 1より、 $x=1/2$ のときのGHの長さ0.2083を利用し、3.1節から3.3節のいずれかの折り方で角度が得られる。Table 1から近い値が得られないときは、第一定理折りを複数回行うなど様々な長さを得る必要はあるが、定規やコンパスを用いずにほぼ任意の角度を作ることができる。

4. まとめ

数学を教えている上で年々、楽をしようとする学生が増えていることに危機を感じている。表の罫線は省略され、暗算に頼り簡単な計算ミスをする。グラフを描くことを面倒くさいという。こうした一種の手抜きは、ゲーム機、携帯電話、インターネットの普及で、ボタンやキーを押すという単純作業に慣らされた子どもが微妙な指先の感覚が必要な描画や物づくりに苦痛を感じやすくなっていること、の表れと考えられる。エンジニアを育成する高専ですら物づくりに反する面倒くさいという感覚が蔓延しているのである。折り紙を教育に取り入れることの意義は、道具に頼らず自らの指のみで簡単な折りを繰り返し複雑な造詣を作る作業がこの危機を脱する手段になること、と考えている。

今後の課題としては、公開講座や要望があれば出前授業を行い、折り紙の数学を多くの人々に広めていくことである。その際、内容の分かりやすさはもちろんであるが、視覚的に分かりやすい工夫として、例えば、アドビシステムズ社のFlashやIllustratorを講座で使えるようにしたい。ミニ研究としての課題は、今年度得られた結果を来年度以降さらに発展できるよう、折り紙の特性をさらに深く理解し、4次方程式の解を与える折り方やより精度の高い任意の角度を折る方法などを考えていくことである。

付 録

昨年度行った公開講座「折り紙の数学」におけるアンケートの一部を今後の参考となるよう最後に

付録として載せる。(受講者:中学生16名)

[A] 折り紙について

- (1) 折り紙で遊んだことがあるか。
 ある 15人
 ない 1人
- (2) 折り紙と数学は関係すると思っていたか。
 思っていた 1人
 思っていなかった 15人

[B] 公開講座について

- (1) 公開講座の内容は理解できたか。
 かなり理解できた 6人
 ある程度理解できた 10人
 理解できなかった 0人
- (2) 公開講座を受けて折り紙と数学は関係すると思うようになったか。
 思うようになった 15人
 思うようにならなかった 1人

[C] 学校の勉強について

- (1) 数学は好きか。
 好き(どちらかといえば好きも含む) 8人
 普通 6人
 嫌い(どちらかといえば嫌いも含む) 2人

[D] 自由記述

- ・折り紙でバラを作って、それが数学に繋がるのが面白かった。
- ・バラを作るのは少し難しかった。
- ・X折り線や公理の話は勉強になった。
- ・補助員の先輩の話がためになった。

この教育研究は、平成22年度福島県学術教育振興財団の研究助成を利用して行った。

文 献

- 1) 芳賀和夫:オリガミクスⅠ, 日本評論社, (1990).
- 2) 芳賀和夫:オリガミクスⅡ, 日本評論社, (2005).
- 3) 鈴木正樹:折り紙の数学, 福島工業高等専門学校研究紀要No50, 175-180, (2009).
- 4) Thomas Hull 編集 (川崎敏和 監訳):折り紙の数学と科学, 森北出版株式会社, (2005).
- 5) Robert Geretschlager (深川英俊 訳):折紙の数学, 森北出版株式会社, (2002).