

ウィルバーフォース振り子の運動

The motion of the Wilberforce pendulum

鈴木 三男・布施 雅彦・鈴木 茂和*・伊藤 淳**

福島工業高等専門学校一般教科

*福島工業高等専門学校機械工学科

**福島工業高等専門学校電気工学科

Mitsuo Suzuki, Masahiko Fuse, Shigekazu Suzuki* and Atsushi Itou**

Fukushima National College of Technology, Department of General

* Fukushima National College of Technology, Department of Mechanical Engineering

** Fukushima National College of Technology, Department of Electrical Engineering

(2012年9月11日受理)

In the Wilberforce pendulum, up and down motion and rotary motion alternately relieve and depending on the conditions, resonance phenomenon occurs. We made a Wilberforce pendulum of our own and analyzed experimentally the motion of the pendulum from image analysis. In addition, we attempted a simulation based on the experimental conditions. In this paper, we report a comparison between simulation and experimental results.

Key words: Wilberforce pendulum, video image position analysis, computer, digital camera, simulation

1. はじめに

単振動は力学分野の中でも重要な項目であり、その後続く波動分野の基礎となっている。我々は学生に単振動をしっかり理解させるため、これまでも授業導入時に演示実験やDVD映像を利用するなどの工夫を凝らしながら、低学年の物理の授業を行なって来ている。単振動については、学生は2学年の前期に講義及び実験を通して、まずは単振動の基礎を学習し、3学年の後期には発展応用として、学生は単振動を表す微分方程式の導出から一般解までを本校では学んでいる。

1894年に発見されたウィルバーフォース振り子は、上下運動とねじれ振動が交互に起こる不思議な振り子で、「青少年のための科学の祭典」¹⁾やサイエンスショー等で紹介され、これまでも運動分析の報告²⁾や高校生による研究発表³⁾もされている。今回、「ばね振り子」の振り下げおもりの形状を一工夫することで、今までは見過ごしてきたおもりのねじれ振動が観察できることに興味をひかれ、ウィルバーフォース振り子を自作した。

ばねに力が加わると、フックの法則に従った伸びや縮みが生じると共に、ばねを構成する針金にはねじれ

が生じる。周期的な上下振動により周期的なトルクが針金に加わり、逆に周期的ねじれ運動より周期的な力がばねに加わると考えられる。この周期的なタイミングが合致する共振条件では、おもりの上下運動とねじれ振動が交互に起こる現象を観察できる。共振現象は地震の長周期振動による建物の振動、脱水時の洗濯機の振動など身近の所にも見られる現象であり、専門科目によっては構造体の設計になどにおいて重要な現象である。そのため我々はウィルバーフォース振り子を使用することで、「ばね振り子」は上下振動するだけと思っている学生の固定観念を払拭し、共振現象への興味が喚起できればと考えている。

ウィルバーフォース振り子を演示用また学生実験用教材として利用するにしても、我々も十分にその運動を熟知しておく必要がある。そこで今回、我々はまず作成したウィルバーフォース振り子の基礎的物理量を測定し、実験的に振り子の共振現象、共振条件を調べた。振り子の運動の分析では、振り子の運動に影響を与えないように、デジタルカメラで振り子の運動を撮影し、撮影した画像データ分析する方法を用いた。⁴⁾⁵⁾⁶⁾⁷⁾⁸⁾また作成した振り子の物理的諸量を用いて、理

論的な数値シミュレーションを行い、実験結果との比較したのであわせて報告する。

2. 自作ウィルバーフォース振り子

Fig. 1は今回自作したウィルバーフォース振り子の実験風景である。ばねには、短く柔らかい中村理科社製の「力学実験用ばね」を使用した。このばねはあまり頑丈な作りではないことから、学生実験用としては今まではあまり利用していないものではあるが、振り下げおもり等の関係から、今回は過荷重を加えないように注意しながら使用することにした。

Fig. 2はこの振り子の最も重要となる振り下げおもりの写真である。振り下げおもりは鉄製の六角ボルト (M6×60) をベースに作成している。ボルトの頭部には1φの穴を開け、ここにばねの先端を入れて、頭部側面からM2のネジでばねと振り下げおもりを止めている。

頭部のすぐ下には慣性モーメント調整用の大型鉄製六角ナットを入れ、M6ナットで固定している。この大型六角ナットの両端にはM4のネジを切り、軽いABS樹脂製のM4ネジ棒 (写真では黒い棒) を取り付けた。振り下げおもりの慣性モーメントは、このネジ棒の両側にはめ込まれた3.2gの慣性モーメント調整おもり (M5ナットとM4ナットとを接着) を回転させて、回転中心からの距離を変えることで、調整できるように設計した。

下方のネジ部にはナットやワッシャーを入れ換えることで (写真ではナット4個)、振り下げおもりの

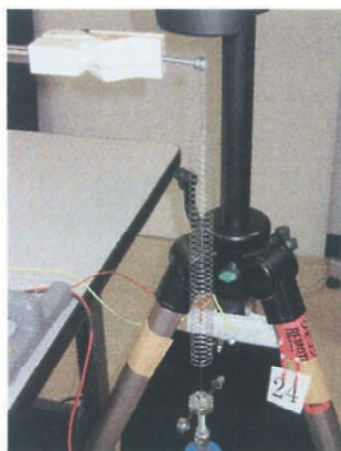


Fig. 1 Wilberforce pendulum of our own

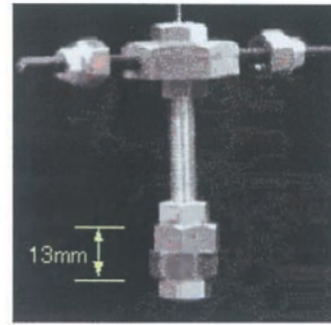


Fig. 2 lower swing weight

全質量の調整や実験的に振り下げおもりの慣性モーメントの算出ができるように工夫した。

3. 振り子の基本的物理量

振り子の共振条件を探るとともに数値シミュレーションに必要な物理量を得るために、我々は振り子の基本的な物理量の測定を行った。

3.1 ばね定数kの測定

Fig. 3のようにレーザー距離計を使用して、ばね定数の測定を試みた。ばねの上端を固定し、下端には計測用の反射金属板を取り付け、ばねを鉛直につるした。床にはレーザー距離計を置き、反射板までの距離を測定したところ、おもり20g当たりのばねの伸び Δz は平均0.0645mで、フックの法則からばね定数kは、

$$k = \frac{mg}{\Delta z} = \frac{20 \times 10^{-3} \cdot 9.8}{0.0645} = 3.04 [\text{N/m}] \quad (1)$$

が得られた。

一般にばね定数kのばねに質量mのおもりがつるされ、つり合いの位置からzだけ伸びているとき、おもりの運動方程式は

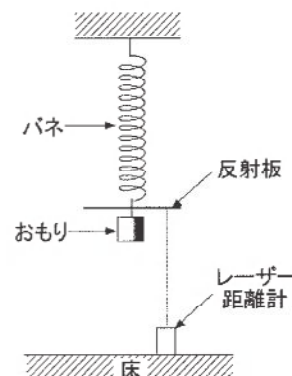


Fig. 3 Measurement of spring constant

$$m \frac{d^2 z}{dt^2} = -kz \quad (2)$$

と表される。つるされたおもりは上下に単振動し、ばね振り子と呼ばれている。(2)式よりこのばね振り子の角振動数 ω_z は

$$\omega_z = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (3)$$

であり、(1)式および振り下げおもりの全質量 $m=56.7\text{g}$ より、自作した振り子の角振動数 ω_z は

$$\omega_z = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{3.04}{0.0567}} = 7.32[\text{rad/s}] \quad (4)$$

と求められる。

3.2 ねじれ弾性定数 μ と慣性モーメント I の測定

ウィルバーフォース振り子も一種のねじり振り子であるが、通常のねじり振り子は針金をくわえた支点から振り下げおもりまでの針金の長さは一定である。そこで振り下げおもりをつるし、釣り合いの状態ではばねの上端と下端を糸で結んで、ばね伸びを一定に保ち、振り子が回転運動しかできないようにした。⁶⁾

一般に慣性モーメント I のねじり振り子が、釣り合いの位置から回転角 θ だけねじれているとき、生じる力のモーメントは回転角 θ に比例する。このとき振り子の回転の運動方程式は

$$I \frac{d^2 \theta}{dt^2} = -\mu \theta \quad (5)$$

で、比例定数 μ はねじれ弾性定数である。(5)式は(2)式と同形であり、ねじれ弾性による単振動が生じる。このねじれ振り子の角振動数 ω_θ および周期 T は、

$$\omega_\theta = \sqrt{\frac{\mu}{I}} \quad (6)$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{\mu}} \rightarrow T^2 = 4\pi^2 \frac{I}{\mu} \quad (7)$$

と表される。しかし、Fig.2に示すように振り下げおもりの形状は複雑で、振り子の慣性モーメント I は簡単に算出することは出来ない。そこで、Fig.4(b)に示すように、算出可能な慣性モーメント I_0 のおもり(測定では10枚のワッシャー)をFig.4(a)の振り子に装着することで、振り子の慣性モーメント I' は $I' = I + I_0$ に変わり、周期は T' に変化する。慣性モーメント I' と周期 T' は(4)式より

$$T' = 2\pi \sqrt{\frac{I'}{\mu}} \rightarrow T'^2 = 4\pi^2 \frac{I'}{\mu} = 4\pi^2 \frac{I + I_0}{\mu} \quad (8)$$

と表せる。(7)、(8)式から、未知の慣性モーメント I およびねじれ弾性定数 μ は

$$\mu = \frac{4\pi^2}{T'^2 - T^2} I_0 \quad (9)$$

$$I = \frac{T'^2}{T'^2 - T^2} I_0 \quad (10)$$

と各振り子の周期測定から求められる。

実際にはFig.2に示す慣性モーメント調整おもりを2回転ごとに外向きに移動させ、その時々振り子の周期 T 、 T' を測定した。この結果を基に(10)式から求めた振り子の慣性モーメント I がFig.5中の「●」である。図中の曲線は、振り子の慣性モーメント I_G (調整おもりなしの場合)に調整おもりの質量 m 、調整おもりの回転中心からの距離 r_1, r_2 から

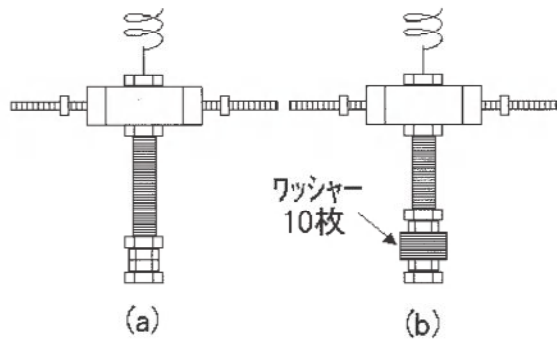


Fig. 4 Measurement of moment of inertia

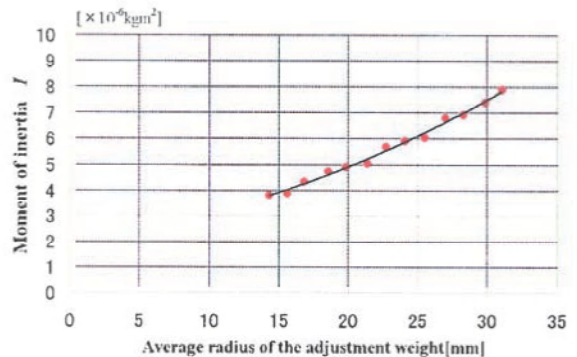


Fig. 5 Change in moment of inertia due to the rotation of the adjustment weight

$$I = I_G + mr_1^2 + mr_2^2 \quad (11)$$

で求めたものである。ここで各調整おもりの回転距離が異なるのは、M4ネジ棒がABS樹脂製の柔らかい素材で、ネジきりピッチが完全に0.7mmの等間隔ではないためであり、それ故横軸には回転距離の平均を用いた。

また、(9)式より求められた振り子のねじれ弾性定数 μ の平均値は、

$$\mu = 2.95 \times 10^{-4} [\text{Nm}] \quad (12)$$

であった。

ウィルバーフォース振り子として、この振り子が上下振動とねじれ振動が共振するためには、(4) (6) (12)式より、振り子の慣性モーメント I は、

$$I = \frac{\mu}{\omega_z^2} = \frac{2.95 \times 10^{-4}}{7.32^2} = 5.51 \times 10^{-6} [\text{kgm}^2] \quad (13)$$

である必要がある。(13)式の値とFig.5より、我々は調整おもりの平均回転距離22.7mm (=12回転)近傍で、上下振動とねじれ振動の共振が起こり、ウィルバーフォース振り子の特徴を観測できると予測した。

4. 振り子の実験的運動解析

4.1 方法

ウィルバーフォース振り子の振動方向は、上下とねじれの2方向で、その方向は互いに垂直である。我々は2方向の運動を同時に撮らえるために、2台のデジタルカメラを準備し、各々のカメラで上下振動 (Fig. 6) とねじれ振動 (Fig. 7) を同時に録画した。この方法は、振り子に直接センサー等を装着する必要がない上、振り子の運動そのものは影響を与えない利点があるが、2方向の運動画像の時刻を同定するには工夫が必要である。そこで、我々は画面内に入るように赤色LED (1方向対して1個、計2個) をセットし、LEDを随時点灯、消灯させた。録画された画像内のLEDの点灯、消灯状態から、我々は2方向の同期を確認し、振り子の運動解析を行った (Fig. 6, 7参照)。

また、実験は初速度なし、初期変位10mmの初期条件で行った。初期変位10mmにはFig. 6, 7に見られるように自作の電磁石を使用し、振り下げおもりをつり合いから引き下げた。電磁石の電源が切れると同時に、振り子は運動を開始する。同期チェック用LEDは電磁石

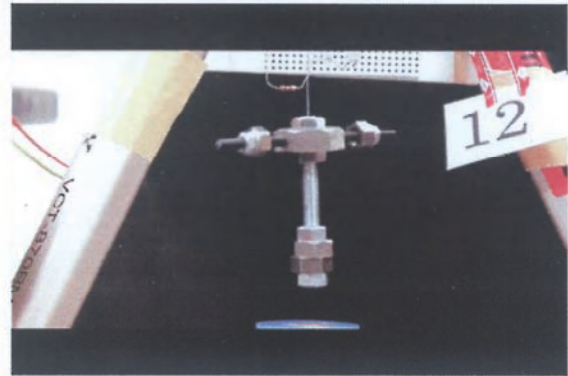


Fig. 6 Measurement of vertical oscillation

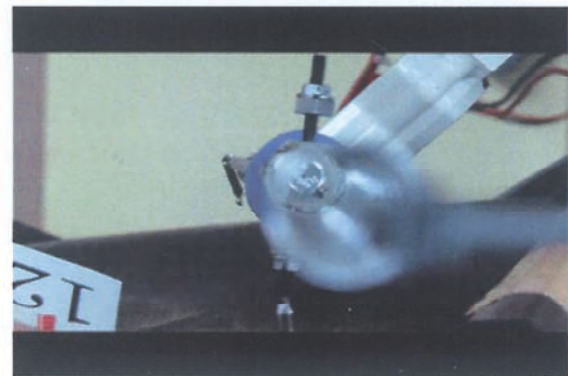


Fig. 7 Measurement of rotational oscillation

の電源と連動しており、2方向から振り子の運動開始が画像からも確認できるように工夫した。

振り子の運動を解析した手順は次の通りである。

解析手順

- (1) 2台のデジタルカメラ (FX-10 CASIO製) を使い、同時に2方向から、録画モード1280×720 (30フレーム/秒) で、ウィルバーフォース振り子の運動を約50秒間撮影する。
- (2) 画像編集ソフトを使用し、撮影した動画を1秒間に30枚のJPEG形式の静止画に自動変換して、フラッシュメモリー等の媒体に保存する (1動画に対して約60MB程度の容量が必要)。
- (3) フリーソフト「イメージJ」を使用して、静止画内の振り下げおもりの位置または回転角度を1枚ずつ求め、蓄積したデータをExcelシート上にペーストする。
- (4) Excelシート上のデータをグラフ化して、ウィル

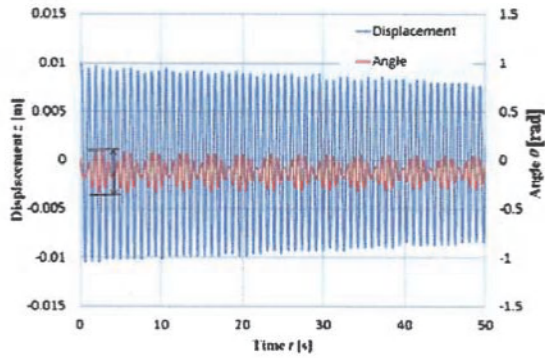


Fig. 8 Appearance of vertical oscillation and Torsional oscillation (rotation 0)

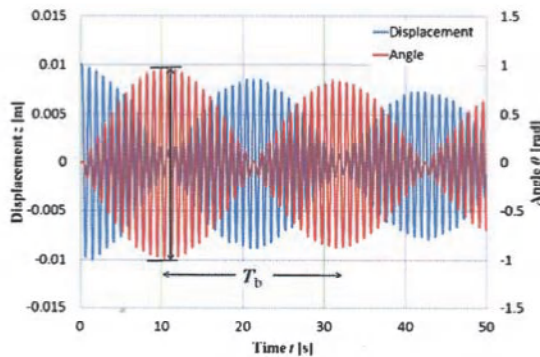


Fig. 9 Appearance of vertical oscillation and Torsional oscillation (rotation 12)

バーフォースの振り子の運動の分析を行う。

4.2 結果

比較のために、調整おもりの平均回転距離14.3mm (=0回転) と22.7mm (=12回転) の場合をFig. 8,9に示す。ともに同時に上下振動とねじれ振動が起こっているが、同じ初期条件でありながら、ねじれ振動の振幅の大きさの違いやビート周期 T_b の違いが明らかに分かる。特に調整おもりの平均回転距離22.7mm (=12回転) の場合には、上下振動とねじれ振動の間で、効率よくエネルギーが交換されている様子が分かる。振り子の共振条件を探るために、Fig.8,9中に示すように、ねじれ振動での振幅より

ねじれ振幅P-P=振幅の最大値-振幅の最小値と定義し、調整おもりの平均回転距離に対するねじれ振幅P-Pの値を求めたグラフがFig. 10である。横軸が

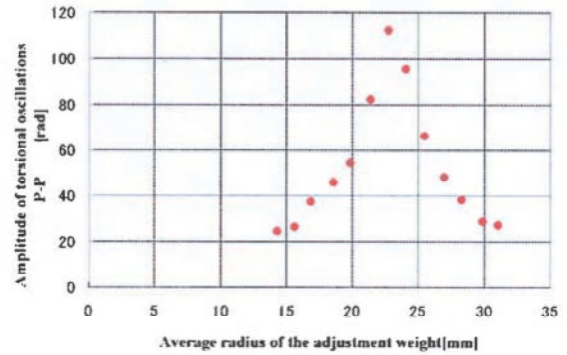


Fig. 10 Changes in the amplitude of torsional oscillations by adjusting weight

周波数ではなく平均回転距離ではあるが、Fig. 10は振り子の共振曲線を示している。このグラフからも、調整おもりの平均回転距離22.7mm (=12回転) 近傍のときに、共振が起こっている事が分かり、先の我々の予想と合致する結果が得られた。

5. 振り子のシミュレーション

5.1 計算式と結合係数

ウィルバーフォース振り子では上下振動とねじれ振動の間で共振が起こるので、我々は2つの運動方程式をつなぐ結合係数 α 、 β を導入した。上下振動の運動方程式(2)式にはねじれ角 θ に比例する力 $\alpha\theta$ を、また回転の運動方程式(5)式には変位 z に比例する力 βz をそれぞれ加えて、各運動方程式を^{1),2)}

$$m \frac{d^2 z}{dt^2} + kz + \alpha\theta = 0 \quad (14)$$

$$I \frac{d^2 \theta}{dt^2} + \mu\theta + \beta z = 0 \quad (15)$$

と変形した。これら2つの運動方程式を基礎に我々はルンゲ・クッタ法を用いて、シミュレーションを行った。シミュレーションではまず、結合係数 α 、 β がどれくらいの値になるかを見積る必要がある。そのために結合係数 α 、 β をパラメータとして、慣性モーメント(調整おもり平均回転距離22.7mm (=12回転)時)、質量などは前述の3.振り子の基本物理的量を用いて、共振時シミュレーションを行った。いろいろな α 、 β パラメータを用いてシミュレーションを繰り返した結果、 α 、 β はねじれ振動の最大角度 θ_{max} とビート周

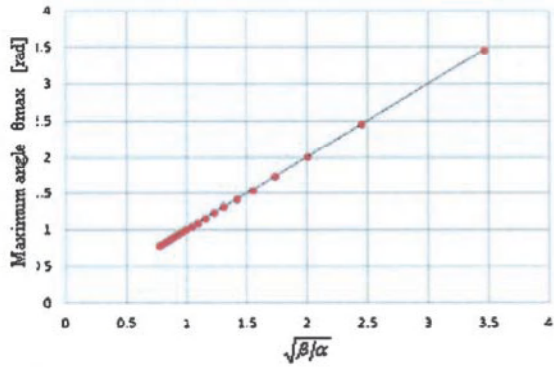


Fig. 11 Relationship between maximum angle and coupling coefficient

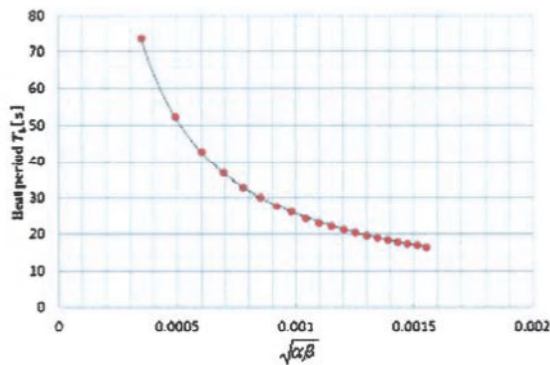


Fig. 12 Relationship between period and coupling coefficients

期 T_b に影響し、 α 、 β の値を交換しても、傾向は同じで大きな差は見られない事が分かった。Fig. 11, Fig. 12はそれぞれ、 $\beta=0.0012$ の条件下で、 $\alpha=0.0001$ から $\alpha=0.002$ まで変化させたとき、ねじれ振動の最大角度 θ_{max} 、ビート周期 T_b の変化の様子を示したものである。Fig. 11から最大角度 θ_{max} は $\sqrt{\beta/\alpha}$ にほぼ比例し、

$$\theta_{max} \cong 1.0076 \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} \quad (16)$$

と近似される。また、Fig. 12からはビート周期 T_b は $1/\sqrt{\alpha\beta}$ にほぼ比例し、

$$T_b \cong \frac{0.0261}{\sqrt{\alpha\beta}} \quad (17)$$

と近似できる。これより実測された最大角度 θ_{max} 、ビート周期 T_b と比較し、 $\alpha = \beta = 0.0012$ の時の先の運動解析の結果と最も一致する事が分かった。

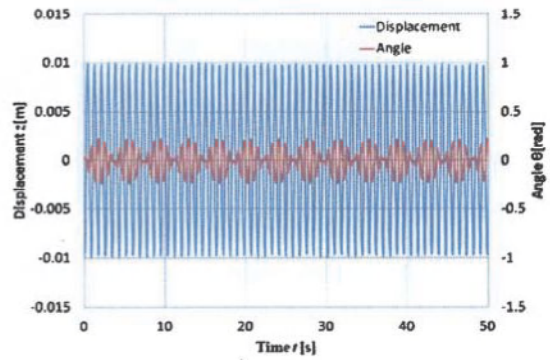


Fig. 13 Appearance of vertical oscillation and torsional oscillation (rotation 0) (By simulation)

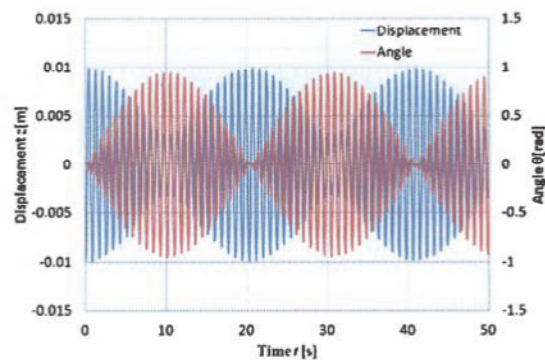


Fig. 14 Appearance of vertical oscillation and torsional oscillation (rotation 12) (By simulation)

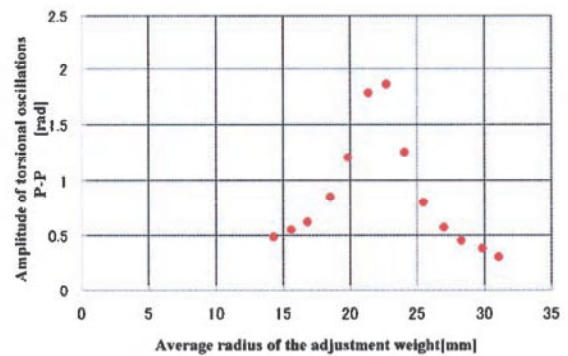


Fig. 15 Changes in the amplitude of torsional oscillations by adjusting weight (By simulation)

5.2 シミュレーションによる結果

結合係数 $\alpha = \beta = 0.0012$ とし、先の振り子の物理諸量とFig. 5で求めた計算慣性モーメント I の値を代入して、以降のシミュレーションを行った。まずは調整

おもりの平均回転距離14.3mm (=0回転)の場合をFig.13に示す。実験的に求めたFig.8と比較すると、全体的に上下運動がほぼ一定に振動している中で、わずかなねじれ振動が周期的に起こっている点はほぼ一致した。しかし実験と比べ、シミュレーションではビート周期 T_b が若干長くなり、50秒間のビート回数が若干減少している。

次に調整おもりの平均回転距離22.7mm (=12回転)の場合をFig.14に示す。同様に実験的に求めたFig.9と比較すると、50秒間に2.5回のビートが起こり、上下振動とねじれ振動の間で、効率よくエネルギーが交換されている点は一致している。しかし実験と比べ、シミュレーションではビート周期 T_b が若干短くなっている。Fig.8では変位 z 、Fig.9では角度 θ の時間変化でより顕著であるが、実際の実験では摩擦力や空気抵抗などにより、振動の振幅が減衰して行くことが、シミュレーションと比較すると良く分かる。したがって、より実験に近づけるには(14)(15)の式に減衰項を加える必要があり、我々はエネルギー損失を考慮しなければならない。

最後に調整おもりを移動して、慣性モーメントを変えた場合のねじれ振幅P-Pを求めたグラフがFig.15である。実験的に求めたFig.10と同様に、Fig.15からも調整おもりの平均回転距離22.7mm (=12回転)近傍で、共振が起こる事が読み取れる。しかし詳細に眺めると、実験では平均回転距離22.7mm (=12回転)以後で、またシミュレーションでは以前に共振が起こる事が推察される。

6. まとめ

我々は自作したウィルバーフォース振り子の基礎的物理量を測定し、その慣性モーメントの値から、調整おもりの平均回転距離22.7mm (=12回転)近傍で共振が起こることを予測した。実験的に振り子の共振現象、共振条件を調べたところ、予測通り調整おもりが平均回転距離22.7mm (=12回転)近傍で共振が起こることを確認することが出来た。

また、測定結果の物理的諸量を用いて、理論的な数値シミュレーションを行い、実験結果との比較したところ、ビート周期 T_b に若干の食い違いがみられるが、

概ね実験的結果と一致した。しかし、シミュレーションをより実験に近づけるには(14)(15)の式に減衰項を加える必要があることも分かった。

ばねとおもりだけの持ち運びの簡単な「ばね振り子」であるが、振り下げおもりを工夫することによって、共振現象への興味を喚起する演示用授業教材として活用できる。

しかし、画像解析に時間がかかる問題と動画を静止画に加工する技術が现阶段では必要となることから、実験用教材としては、残念ながら導入は困難な状況である。今回の結果を踏まえて、ウィルバーフォース振り子の運動にあまり影響しないセンサーによる方法を考え、実験用教材として再検討してみたい。

7. おわり

ばね振り子は、低学年の学生には従来どおり単振動の実験教材として活用していくが、学生に共振への興味を喚起する意味で、このような不思議なばね振り子の運動を見せることは重要である。ウィルバーフォース振り子は演示教材として十分活用できると考えている。

最後に、振り下げおもりにの加工に、ご協力を頂きました大和田光宏技術職員に感謝いたします。

文 献

- 1) jc.maxwell.jp/mechanics/wilberforce/index.html
- 2) 島田昌敏, 孫朝紅: 大阪教育大学紀要自然科学Ⅲ, 45(1), 19-30(1996).
- 3) ssh.jst.go.jp/research/show/662
- 4) 鈴木三男, 増田健二: 物理教育, 48(1), 1(2000).
- 5) 鈴木三男, 増田健二, 湊 淳, 小澤 哲: 応用物理教育, 25(1), 3(2001).
- 6) 鈴木三男, 布施雅彦, 湊 淳, 小澤 哲, 増田健二: 福島高専紀要, 41, 102(2001).
- 7) 鈴木三男, 湊 淳, 小澤 哲, 増田健二: 福島高専紀要, 43, 65(2003).
- 8) 鈴木三男, 根本信行, 布施雅彦, 増田健二: 福島高専紀要, 49, 27(2008).

